

Bernard Helffer

Groupe de travail *Geometrie und Physik*



Né le 8 Janvier 1949 à Paris. Nationalité française. Marié, 4 enfants. Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. 1971-1978: chercheur au CNRS. 1976: Thèse d'état en Mathématiques (équations aux dérivées partielles); 1979-1989 Professeur à l'Université de Nantes; 1982-1983 et 1986-1987: Maître de recherche détaché l'Ecole Polytechnique. Depuis 1989 Professeur à l'Université Paris-Sud (détaché pour 5 ans à l'Ecole Normale Supérieure de Paris). Principales responsabilités exercées: Secrétaire de la Commission Mathématique du CNRS (1974-78); Président de la section mathématique du conseil supérieur des Universités (1984 — 86); Elu au conseil de la Société Mathématique de France et responsable du secteur publications (1987— 90). A partir de 1989: Membre du Groupe d'Etudes Techniques chargé de l'examen des formations doctorales en Mathématiques. —Adresse: Département de Mathématique et d'Informatique, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex.

Le projet initial

J'ai été particulièrement intéressé ces dix dernières années par l'étude des liens entre la mécanique quantique et la mécanique classique, dans le cadre du principe de correspondance qui dit en gros que, lorsque la constante de Planck h tend vers 0, les quantités spectrales associées au problème quantique tendent vers les quantités correspondantes associées au mouvement classique déterminé dans l'espace de phase par les équations de Hamilton.

Différentes techniques peuvent être utilisées pour aborder ce problème, mais l'outil principal que j'ai utilisé est la théorie des opérateurs pseudo-différentiels qui donne en particulier un moyen très naturel d'associer à un hamiltonien, c'est à dire une fonction définie sur l'espace des phases, un opérateur sur un espace de Hilbert.

Par extension, beaucoup de problèmes apparaissant en physique peuvent être étudiés dans le même esprit, mais le petit paramètre h est

maintenant proportionnel au flux d'un champ magnétique, à l'inverse de ce flux ou à l'inverse de la masse d'un atome ...

Dans mes recherches, j'aborde tous ces problèmes de manière rigoureuse sur le plan mathématique. Dans certains cas, cela permet une meilleure compréhension du problème physique.

Je ne suis ni physicien, ni géomètre, mais l'avancement de mon programme de recherche et son évolution est largement tributaire de contacts avec des spécialistes dans ces deux domaines. Le *Wissenschaftskolleg* et, plus généralement, les universités de Berlin, m'ont permis de développer de tels contacts dans le cadre du Schwerpunkt *Geometrie und Physik*.

J'ai regroupé mes thèmes de recherche par grands thèmes sur lesquels je travaille depuis plusieurs années. Pour chacun de ces thèmes, je mentionnerai les progrès accomplis cette année et comment ces recherches se sont insérées dans le cadre du projet berlinois *Geometrie und Physik* (responsables scientifiques V. Enss, R. Schrader et R. Seilers*) mené conjointement par le *Wissenschaftskolleg* et les universités berlinoises (Freie Universität [FU] et Technische Universität [TU]).

Analyse semi-classique et Physique des solides

Mon travail principal durant ces dernières années avait été de m'attaquer en collaboration avec J. Sjöstrand à l'étude de la structure cantorienne de l'équation de Harper par des méthodes semi-classiques en développant et rendant rigoureuse une démarche proposée par Wilkinson. Ceci avait conduit à la publication de quatre volumes des mémoires de la SMF (3 en collaboration avec J. Sjöstrand et un en collaboration avec J. Sjöstrand et P. Kerdelhué). Les travaux devraient être exposés au Séminaire Bourbaki par J. Bellissard.

Ce travail a connu une suite dans la thèse de P. Kerdelhué dirigée par J. Sjöstrand sur l'équation de Harper hexagonale et soutenue cette année et pour laquelle j'étais rapporteur scientifique.

P. Kerdelhué nous a rendu visite et a pu exposer ses résultats au séminaire à la TU. Le *Wissenschaftskolleg* zu Berlin a assuré son logement. Sur ces travaux j'ai fait de nombreux exposés publics ou privés et j'ai eu de nombreuses discussions avec J. Bellissard, V. Tchoulaevski, E. Dinaburg, T. Spencer, Ya. G. Sinai et R. Seiler.

Mon exposé à la TU [a] a été rédigé.

* Une liste récapitulative des noms des chercheurs ayant participé au projet est donnée à la fin.

J'ai par ailleurs contribué à éclaircir dans l'étude de généralisations du papillon de Hofstadter certains problèmes rencontrés par A. Barelli et C. Kreft (élèves respectifs de J. Bellissard et R. Seiler).

Le cours de J. Bellissard à la *Humboldt Universität*, l'exposé de V. Tchoulaevski et des discussions avec T. Spencer m'ont permis de comprendre des points de vue très différents.

D'autres aspects de ce travail (en liaison avec l'étude de phénomènes où des calculs de classes de Chern apparaissent) ont été discutés avec R. Seiler.

Toujours en collaboration avec J. Sjöstrand, nous avons ensuite analysé comment on arrivait à l'équation de Harper en Physique des solides. Ceci nous a conduit à partir d'un Survey de J. Bellissard à justifier rigoureusement ce qui est communément appelé l'approximation de Peierls dans l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, et à la thèse de doctorat de F. Daumer (soutenue en Février 1990 à l'université de Nantes) qui développe le même thème dans le cadre de l'approximation dite du *tight binding*. Lors de sa venue à Berlin, nous avons essayé de voir dans quelle mesure on pouvait mener des études similaires dans le cas de l'équation de Hartree-Fock. Dans cette direction, les discussions avec E. Lieb ont été très utiles.

Lors de la visite de F. Klopp, nous avons discuté du problème des effets de perturbations locales par des champs magnétiques.

Opérateurs avec champ magnétique et équation de Dirac

Ce thème est bien entendu étroitement lié au précédent mais les méthodes sont différentes. En particulier, il y a en toile de fond l'idée de voir comment les techniques que j'ai développées avec J. Nourrigat pour l'étude de l'hypoellipticité sont opérationnelles pour la théorie spectrale.

En collaboration avec A. Mohamed et J. Nourrigat, nous avons analysé le problème des bouteilles magnétiques pour l'équation de Dirac, question qui est la suite naturelle de la «presque» caractérisation des bouteilles magnétiques que nous avons donnée avec A. Mohamed, mais qui n'admet pas du tout à la même réponse. Des idées voisines sont également utilisées dans mon travail plus récent [e] avec J. Nourrigat (qui recoupe partiellement un travail de Brummelhuis) qui étudie la décroissance des fonctions propres pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique.

Ce travail a été achevé lors de la visite de J. Nourrigat au Wissenschafts-

kolleg et vient d'être accepté pour publication au *Journal d'Analyse Mathématique* de Jérusalem.

Effet d'Aharonov-Bohm

Je m'étais également intéressé en 86 — 87 à un problème connexe consistant à étudier l'effet d'un champ magnétique sur la première valeur propre de l'équation de Schrödinger. Il est classique par l'inégalité de Kato qu'elle monte mais j'ai taché de mesurer par des méthodes semi-classiques de combien elle monte. J'avais fait apparaître des phénomènes du type de ceux observés dans la classique expérience de Bohm-Aharonov. Dans cette direction je dirige le travail en thèse de O. Hebbar (Université d'Orran) qui étudie le cas d'opérateurs sur des fibrés. Nous avons pu obtenir des résultats significatifs dans cette direction lors de sa visite à Berlin.

Signalons aussi quelques résultats comparables obtenus par B. Parisse sous ma direction pour l'équation de Dirac (il s'agit alors de mesurer un *splitting* provoqué par un effet de flux) et qui ont été discutés au cours de sa visite.

Autour de l'inégalité de Lieb-Thirring et de la conjecture de Scott

Je mentionne ici les travaux obtenus avec les techniques développées avec D. Robert depuis 1981. Il est bien connu que dans les deux cas indiqués dans le titre, on est confronté au problème d'estimer (équivalent asymptotique ou majoration universelle) des sommes de valeurs propres négatives. En collaboration avec D. Robert, nous avons développé un calcul fonctionnel semi-classique pour des opérateurs pseudo-différentiels permettant de manier des fonctions irrégulières comme par exemple $x \rightarrow x_-$. Des extensions au cas de potentiels coulombiens sont actuellement développées par Ivrii et Sigal.

Même si la démonstration est très simple, le résultat démontré également en collaboration avec D. Robert infirmait une conjecture de Lieb-Thirring vieille de 15 ans. Curieusement, c'était l'étude des opérateurs les plus simples (oscillateurs harmoniques) qui fournissait les contre-exemples. J'ai exposé ce travail [d] dans le séminaire organisé par R. Schrader et R. Seiler à la FU.

Dans cette direction, j'ai obtenu quelques nouveaux résultats sur les moments d'ordre 1 avec B. Parisse qui a réalisé un programme de vérifica-

tion exacte de la conjecture pour des potentiels quadratiques (cf. [c] et [d]). Ce programme a été testé et utilisé par B. Parisse au Wissenschaftskolleg et l'aide de C. Kreft a été très utile.

Enfin, j'ai longuement discuté avec E. Lieb d'extensions possibles de ces conjectures au cas avec champ magnétique.

Comme on l'a déjà indiqué, la conjecture de Scott récemment démontrée dans le cas d'un atome tourne aussi autour de l'estimation de moments d'ordre 1. Une des difficultés mais qui est justement à l'origine du terme appelé «de Scott» est qu'on a à travailler avec des potentiels coulombiens. Il y a différentes manières de traiter ce problème. J'ai exploré celle constituant à désingulariser par la transformation de Kustaanheimo-Stiefel (idée qui est utilisée au sein de l'équipe berlinoise par K. Chantelau, M. Klein et A. Knauf). Une raison pour cela est qu'on voit apparaître naturellement des actions de groupes compacts.

Dans [g] (terminé ici), développant un travail initial contenu dans la thèse de troisième cycle de mon étudiante Z. El Houakmi, nous avons établi, en collaboration avec cette dernière, une théorie semi-classique adaptée à cette situation. En collaboration avec A. Knauf, H. Siedentop et R. Weikard, nous montrons dans [i] comment cela s'applique au cas coulombien. Ce travail s'inscrit de manière typique dans le programme de cette année:

Une question trouvant son origine dans la physique trouve une solution avec une combinaison de méthodes analytiques et géométriques.

Ceci ne donne toutefois pas pour l'instant de nouvelle démonstration de la conjecture de Scott puisque nous ne traitons pour l'instant que la fonction de comptage. J'ai également écrit une note ([k]) consacrée à une nouvelle démonstration de la formule de Gutzwiller dans la version démontrée par Guillemin-Urbe et à un travail récent de S. Zelditch: sur un théorème de R. Schrader et M. Taylor. Cette note est un développement d'un exposé que j'ai fait à la TU à la demande de R. Seiler. Sur cette dernière question, j'ai eu des discussions intéressantes avec J. Bellissard et Ya. G. Sinai en liaison avec les problèmes de chaos quantique. Sans avoir obtenus de résultats nouveaux sur cette question, les nombreux exposés entendus à Berlin m'ont fait percevoir la complexité des problèmes.

Résonances pour l'équation de Dirac

J'indique ici les travaux obtenus dans la lignée de mon travail avec J. Sjöstrand sur les résonances (1986). Pour l'essentiel, c'est le thème de recherche que j'ai proposé à B. Parisse pour sa thèse de doctorat qui devrait être sou-

tenue fin 1991. B. Parisse travaille dans le cadre semi-classique. En collaboration avec E. Balslev [b], j'ai exploré d'autres aspects: principe d'absorption limite, limite non relativiste. Ce travail a été terminé au début de mon séjour à Berlin et est accepté pour publication.

Notons ici que j'ai eu quelques discussions avec M. Klein sur mon travail avec J. Sjöstrand qui applique en collaboration avec A. Knauf nos techniques pour l'étude de résonances pour des problèmes à singularités coulombiennes. Les discussions menées au Wissenschaftskolleg entre M. Klein et J. Sjöstrand lors de la visite de ce dernier ont été, je pense, très utiles.

Problèmes liés à la théorie de Ginzburg-Landau

A la suite de questions de C. Bolley concernant des problèmes de détermination de champ critiques pour des problèmes de superconducteur, il est apparu que cette étude faisait apparaître des problèmes amusants de dépendance de la valeur propre en fonction du bord, et il est apparu que les techniques semi-classiques pouvaient également être utilisées efficacement même en dimension 1. Ces discussions avec C. Bolley et M. Dauge ont débouché en particulier sur [j] dont ma contribution a été écrite à Berlin. Les discussions que j'ai pu avoir avec Y. G. Oh sur un sujet nouveau pour moi ont été très enrichissantes.

Problèmes semi-classiques et mécanique statistique

Ce sujet trouve son origine dans un cours de Kac à l'université de Brandeis que m'a fait connaître M. Brunaud, il y a deux ans, et je dois dire que j'ai trouvé passionnant ce cours bourré d'idées heuristiques pour ramener des problèmes de mécanique statistique en les ramenant à des problèmes d'asymptotique semi-classique pour des opérateurs que j'appelle de Kac: $\exp(-V/2) \exp(h^2 A) \exp(-V/2)$ et dont le comportement ressemble beaucoup (mais il fallait le démontrer) à $\exp(-(-h^2 A + V))$, c'est à dire à l'exponentielle d'un opérateur de Schrödinger. M. Kac avait en tête l'étude des transitions de phase. C'était en 1966 et les années qui ont suivi ont été une période de grand développement pour la mécanique statistique et il ne semble pas que ce cours ait finalement joué le rôle clef.

On peut toutefois espérer de l'approche de Kac une étude fine de l'énergie libre ou du magnétisme pour des températures voisines de la transition.

J'ai beaucoup travaillé cette année à faire l'inventaire des problèmes po-

sés par l'approche de Kac à la mécanique semi-classique. Il y a plusieurs raisons à cela:

La mécanique statistique est un sujet nouveau pour moi et la présence de nombreux spécialistes au Wissenschaftskolleg sur ce sujet (Tchoulaevski, Sinai, Dobrushin, Spencer, Lieb) m'a permis de mieux cerner les problèmes posés et d'en résoudre certains.

Le travail [f] (qui a été terminé ici) montre comment pour le modèle le plus simple, on peut appliquer des techniques que j'avais utilisées avec D. Robert et J. Sjöstrand. Je l'ai exposé en début d'année à la TU.

La remarque de base est ici que l'opérateur de Kac est un opérateur pseudo-différentiel très sympathique! Dans [I] (également écrit ici), je justifie l'approche de Kac pour des interactions obtenues comme somme d'un nombre fini d'interactions exponentielles. J'ai progressivement réalisé cette année que les «vrais» problèmes sont des problèmes où la dimension d'espace tend vers l'oo.

Nous montrons dans [h], écrit ici avec J. Sjöstrand, comment les techniques de J. Sjöstrand sur les problèmes semi-classiques en grande dimension (bornée par une puissance négative du paramètre semi-classique) peuvent être adaptées pour traiter un problème où la dimension tend vers + oo. Plus précisément nous étudions pour une famille très particulière le problème du développement semi-classique de la limite thermodynamique $\lim_{m \rightarrow \infty} (m, h)/m$ où m désigne la dimension, h le paramètre semi-classique et $k_1(m, h)$ la première valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur IR $_m$ associé au potentiel (c'est l'exemple typique):

$V(m)(x) = E, m, x \in \mathbb{R}^m; \log \chi(\sqrt{v(x_i + x_{i+1}))}$ (avec la convention $x_{m+1} = x_1$).

Nous ne savons traiter pour l'instant que les valeurs de v pour lesquelles le potentiel est strictement convexe (c'est le cas le plus simple!).

D'autres discussions ayant eu lieu ici, J. Sjöstrand a écrit depuis un autre travail exposé à Nantes au colloque international de cette année.

Il apparaît également que les problèmes sur lesquels nous tombons sont très voisins de problèmes de la théorie des champs.

Conclusion

Les thèmes abordés peuvent apparaître éparpillés, mais je n'ai pas ce sentiment. J'essaye de montrer dans mon travail comment les idées semi-classiques interviennent dans un grand nombre de problèmes où le petit paramètre ne s'appelle pas nécessairement la constante de Planck. Ces méthodes semi-classiques étant très souvent le coeur du lien entre mécanique

quantique (la physique) et la mécanique classique (la géométrie), j'espère que les progrès accomplis ici et que j'ai essayés de décrire seront utiles et que certaines des idées accumulées ici au cours de nombreuses discussions porteront leurs fruits.

Les grandes facilités d'invitation que mes collègues et moi avons eues au sein du projet ont permis la tenue de séminaires de très haut niveau et l'accélération de ma recherche personnelle. Je tiens ici à remercier tous ceux qui ont permis le succès du projet: d'une part, le recteur W. Lepenies et tous les membres du personnel du Wissenschaftskolleg, d'autre part les professeurs R. Seiler et R. Schrader et leurs équipes de recherche.

Liste des noms mentionnés dans le rapport et ayant participé au programme *Geometrie und Physik*

- A. Barelli (Marseille): étudiante de J. Bellissard, invitée dans le cadre du programme (1 an)
- J. Bellissard: fellow
- K. Chantelau (TU)
- F. Daumer (Nantes): invité dans le cadre du programme (15 jours)
- E. Dinaburg (Moscou): invité dans le cadre du programme (3 mois)
- R. Dobrushin (Moscou): invité dans le cadre du programme (6 semaines)
- V. Enss (Aachen): coorganisateur du projet, invité dans le cadre du programme (6 mois)
- O. Hebbar (Oran-Nantes): invité dans le cadre du programme (15 jours)
- P. Kerdelhué (CNRS, Paris-Sud): invité dans le cadre du programme (15 jours)
- F. Klopp (Paris-Sud): invité dans le cadre du programme 15 jours)
- M. Klein (TU)
- A. Knauf (TU)
- C. Kreft (TU): étudiant de R. Seiler
- E. Lieb (Princeton): invité dans le cadre du programme (une semaine)
- Y. G. Oh (Courant Institut): invité dans le cadre du programme (15 jours)
- B. Parisse (Paris-sud), étudiant de B. Helffer, invité dans le cadre du programme (21 jours)
- R. Schrader (FU): coorganisateur du projet
- R. Seiler (TU): coorganisateur du projet
- H. Siedentop (Alabama): invité dans le cadre du programme (2 visites)
- Ya. G. Sinai (Moscou): invité dans le cadre du programme
- J. Sjöstrand (Paris-Sud): invité dans le cadre du programme (1 semaine)
- T. Spencer (Princeton): invité dans le cadre du programme (7 jours)
- V. Tchoulaevski: fellow
- P. Zograf: fellow

Liste des travaux terminés ou réalisés à Berlin

- [a] «Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (d'après Helffer-Sjöstrand)»
exposé à TU
- [b] avec E. Balslev
«Limiting absorption principle and resonances for the Dirac operator»
A paraître à *Advances in Applied Mathematics* 1991
- [c] avec B. Parisse
«Riesz means of bound states III»
Preprint du LMENS
- [d] «Remarks around a Lieb-Thirring's conjecture»
Texte d'un exposé à Berlin (synthèse)
Preprint du Wissenschaftskolleg zu Berlin
- [e] avec J. Nourrigat
«Décroissance à l'infini des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ électromagnétique polynomial»
Cherprint du Wissenschaftskolleg zu Berlin
A paraître au *Journal d'analyse mathématique* (Jérusalem)
- [f] avec M. Brunaud
«Un problème de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase (ou relecture d'un cours de M. Kac)»
Preprint de l'ENS
- [g] avec Z. El Houakmi
«Comportement semi-classique en présence de symétries: action d'un groupe compact»
Preprint du Wissenschaftskolleg zu Berlin
(à paraître à *Asymptotic Analysis*)
- [h] avec J. Sjöstrand
«Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation»
Preprint
A paraître dans les *Actes du colloque Méthodes semi-classiques à l'université de Nantes*, 24-30 Juin 1991
- [i] avec A. Knauf, H. Siedentop et R. Weikard
«On the absence of a first order correction for the number of bound states of a Schrödinger operator with coulombic singularity»
A paraître aux *Communications in Partial Differential Equations*
- [j] Avec C. Bolley
«An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material»
A paraître aux *Annales. Institut Henri Poincaré. – Section A (Physique Théorique)*
- [k] «Remarks on recent results in semi-classical analysis»
(exposé à Berlin)

- [1] «Décroissance exponentielle des fonctions propres pour l'opérateur de Kac: le cas de la dimension >1 »
(manuscrit).