Eckart Frehland

Kausalität oder Zufall - Ist die Welt berechenbar?

Bei diesem Thema geht es um einen grundlegenden Wandel fest verankerter Überzeugungen in den exakten Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, über die Berechenbarkeit der Natur und die Kausalität der in ihr ablaufenden Prozesse. Zwar hat sich bereits seit der Begründung der Quantenmechanik vor mehr als 50 Jahren die Auffassung vom strengen Determinismus der physikalischen Prozesse grundlegend geändert, aber dies betraf ja die Welt des ganz Kleinen, die dem unmittelbaren Erfahrungsbereich unserer Sinne nicht mehr zugänglich ist. Die Problematik, um die es hier geht, betrifft vor allem den Bereich der mittleren Dimension, den Bereich, den wir mit unseren Sinnen verstehen können, z. B. Fragen der Mechanik. Wenn man in Lehrbücher der klassischen Mechanik sieht, so werden dort fast ausschließlich Probleme diskutiert, für welche eine Berechenbarkeit gegeben ist. Sie vermitteln einen, wie man heute meint, eigentlich falschen Eindruck von der Berechenbarkeit der Welt.

I. Berechenbarkeit

a) Berechenbarkeit in der Mathematik

In der Mathematik ist die Berechenbarkeit von Funktionen ein streng definierter Begriff: Eine mathematische Funktion heißt berechenbar, wenn es einen abbrechenden Algorithmus gibt, welcher den Wert der Funktion liefert. Das heißt, es existiert ein genau beschreibbares, aus endlich vielen Schritten bestehendes Verfahren. Etwas unschärfer ausgedrückt: der *Wert* der Funktion ist mit endlichem Aufwand berechenbar.

Die Berechenbarkeit im streng mathematischen Sinne ist eine Eigenschaft von Funktionen, welche nicht die Regel, sondern die Ausnahme darstellt. Betrachten wir z. B. die mathematische Aufgabe, den Umfang eines Kreises mit vorgegebenem Durchmesser zu berechnen oder die Aufgabe der Quadratur des Zirkels: Im wesentlichen haben wir hierfür die Zahl rr zu berechnen. Die Zahl rr ist aber durch einen endlichen Algorithmus und damit in endlicher Zeit nicht berechenbar.

b) Berechenbarkeit realer Systeme: ein relativer Begriff

Diese mathematische Definition des Begriffs »Berechenbarkeit« ist auf naturwissenschaftliche Fragestellungen offenbar nicht anwendbar. Wir versuchen deshalb eine Eingrenzung des Begriffs »Berechenbarkeit«, welche mehr an den Forderungen der Wirklichkeit orientiert ist. Lassen Sie mich im folgenden den Begriff »Wirklichkeit« naiv verwenden, wie ihn der gesunde Menschenverstand uns vermittelt, unter Ausklammerung des Problems einer objektiven realen Existenz dieser Wirklichkeit. Wie viele andere Begriffe in den quantifizierbaren Naturwissenschaften dürfen wir den Begriff »Berechenbarkeit« nur in *relativierter* Bedeutung verwenden. Ich will dies an dem Beispiel der Bestimmung der Zahl n erläutern: Zwar läßt sich die den Umfang eines Kreises bestimmende Zahl n exakt nicht in endlich vielen Schritten berechnen, doch können wir immer eine Größe in endlich vielen Schritten ermitteln, welche allen geforderten Genauigkeitsansprüchen genügt. Wenn wir nach dem Umfang U eines kreisförmigen ausmeßbaren Gebildes fragen, so ist dies im Grunde keine sinnvolle Problemstellung, solange wir nicht die Genauigkeit der Messung von U angeben. Es ist z. B. nicht nötig, den Umfang der Erde in Millimetern anzugeben. So genau läßt sich dieser nämlich gar nicht messen und nachprüfen. In allen den messenden Wissenschaften zugänglichen Bereichen, den extrem großen wie den extrem kleinen, ist es prinzipiell nicht möglich, eine Größe exakt zu bestimmen, wie groß auch die Meßgenauigkeit sein mag.

Anhand eines weiteren einfachen Beispiels will ich versuchen, die Relativität des Begriffs »Berechenbarkeit« zu illustrieren: Die Bewegung des Planeten Erde in unserem Sonnensystem ist auf Jahre, ja Jahrhunderte und Jahrtausende exakt durch das Newton'sche Gravitationsgesetz bestimmt und berechenbar. »Exakt« ist dabei bezogen auf die durch die charakteristischen Dimensionen des Systems (Durchmesser der Erdbahn, Dauer eines Jahres) gegebenen räumlichen und zeitlichen Maßstäbe. Innerhalb dieser Maßstäbe genügt es für die Berechnung sogar, die Erde als eine in ihrem Schwerpunkt konzentrierte Punktmasse zu idealisieren.

Ich möchte also festhalten, daß in die Diskussion der Berechenbarkeit von Systemen oder Prozessen, welche irgendwie der menschlichen Beobachtung, Registrierung oder Messung zugänglich sind, die prinzipielle Beschränkung der Genauigkeit, also der Fehler der Messung, einbezogen werden muß. Weil es mir hier um die Berechenbarkeit von Prozessen und Systemen geht, welche im weitesten Sinne meßbar bzw. registrierbar sind, werde ich im folgenden den Begriff »Berechenbarkeit« nur in seinem relativierten Bezug zur Genauigkeit der entsprechenden Prozesse verwenden.

Ich möchte schließlich den Gebrauch des Begriffes »Berechenbarkeit« vor allem auf »Vorausberechenbarkeit« beschränken, und zwar aufVorausberechenbarkeit für einen endlichen Zeitraum. Damit soll ein System oder

Prozeß berechenbar genannt werden, wenn bei bestimmter Information fir einen festzulegenden Zeitraum das Verhalten des Systems oder der Verlauf des Prozesses mit der geforderten Präzision vorausberechnet, prognostiziert werden kann. Vorausberechenbarkeit in diesem Sinne ist also dreifach relativiert: durch die Anfangsinformationen, den Prognosezeitraum und die gewünschte bzw. durch Meßfehler vorgegebene Forderung an die Genauigkeit der Prognose.

c) Kausalität und Berechenbarkeit

Die »Berechenbarkeit« hängt eng zusammen mit dem Prinzip der Kausalität, also dem Zusammenhang von Ursache und Wirkung, den wir hier auch nur in rein zeitlichem Sinne verstehen wollen: Ein System verhält sich kausal, wenn jedes Ereignis auf eine Ursache in der Vergangenheit zurückgeführt werden kann und umgekehrt jede Ursache eine bestimmte **Wir**kung, ein genau festgelegtes Verhalten in der Zukunft nach sich zieht. Ist das System darüberhinaus mathematisierbar, so ist aus dem Anfangszustand das weitere Verhalten vorausberechenbar. Der Erfolg der mathematisierten Physik, in vielen Fällen Fragen an die Zukunft mit außerordentlicher Präzision beantworten zu können, beruht auf der Gültigkeit des Prinzips der Kausalität.

Einerseits nun ist für mathematische Modelle von Systemen die Frage, ob diese Modelle dem Prinzip der Kausalität gehorchen, also streng determinierte Vorgänge beschreiben, klar beantwortbar und die Kausalität eine eindeutig definierte Eigenschaft. Andererseits aber ist auch dieser Begriff, wenn er auf die realen Systeme selbst und nicht auf die mathematischen Gleichungen angewendet werden soll, nur in relativierter Form benutzbar: Von Ursachen zu sprechen ist nur sinnvoll, soweit wir wirklich über sie informiert sind und sie messen können. Das gleiche gilt für die Wirkungen, also den späteren Zustand, des Systems. Und es liegt ebenfalls nahe, von einer Gültigkeit der Kausalität nur innerhalb bestimmter Zeiträume zu sprechen. In diesem Sinne besitzen die Gültigkeit der Kausalität und die Eigenschaft der Vorausberechenbarkeit eines Systems die gleiche Bedeutung, und ich werde sie im folgenden als äquivalente Begriffe verwenden.

II. Berechenbarkeit: Gründe für den Erfolg in den exakten Naturwissenschaften

Es ist eine erstaunliche Tatsache, daß Naturwissenschaftler auf die Frage nach der Struktur der wissenschaftlichen Methode und den Gründen fur ihren Erfolg meist keine befriedigende Erklärung haben. Ich will aber dennoch versuchen, die Gründe fur den Erfolg der Naturwissenschaften kurz zu analysieren. Ich beschränke mich dabei im wesentlichen auf das Beispiel der wichtigsten, der Physik. Die Grundgedanken gelten aber ebenso für die anderen mathematisierten Wissenschaften.

a) *Drei Gründe:*
empirische Erfahrung, Mathematisierung, Reproduzierbarkeit

Die drei wichtigsten Gründe für den Erfolg der Physik und der Naturwissenschaften sind:

1. Die Physik ist eine empirische Wissenschaft.
2. Die Physik ist mathematisierbar.
3. Physikalische Prozesse verlaufen unter gleichen Bedingungen gleich.

Dazu einige Erläuterungen: das ganze Gebäude der Physik ruht letztlich auf empirischen Erfahrungen an der Wirklichkeit. Diese empirischen Erfahrungen können nun Erfahrungen in der vom Menschen unbeeinflußten Natur sein (Beispiel: Die Bewegung der Planeten). Aber genauso können es - und dies ist weit häufiger der Fall - künstliche und isolierte Erfahrungen sein. Ein Beispiel hierfür ist das Trägheitsgesetz: ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich gradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Hieran sehen wir ein in der Physik häufig zu beobachtendes Vorgehen: Aus einer unübersehbaren Fülle und Kompliziertheit zusammenwirkender Naturerscheinungen wird eine Gesetzmäßigkeit herausisoliert, welche in der Natur so isoliert gar nicht existiert. (Hier: die kräftefreie Bewegung). Diese Gesetzmäßigkeit wird mittels »künstlicher Erfahrung«, d. h. durch Experimente, überprüft, in welchen die Versuchsbedingungen den idealen Voraussetzungen möglichst nahekommen. Erfahrung in der Physik ist also zum großen Teil auch Erfahrung an einer künstlichen, vereinfachten Wirklichkeit.

Nun sind die so an der Wirklichkeit gewonnenen Erfahrungen durchweg mathematisierbar. Man kann sie nicht nur in Form von Meßtabellen katalogisieren, sondern in guter Näherung auch in eine mathematische Form bringen, man kann Meßergebnisse als physikalische Gesetze in der Sprache der Mathematik formulieren. Diese empirische Tatsache der Mathematisierbarkeit der physikalischen Erfahrung ist für sich schon erstaunlich. Der eigentliche Erfolg der Physik liegt jedoch darin, daß die auf vergangener Erfahrung beruhenden Gesetze der Physik bisher offenbar immer auch ziemlich präzise Voraussagen für die Zukunft erlaubt haben. Es ist deshalb ein grundlegendes Postulat in der Physik, daß unter »genau gleichen« Bedingungen physikalische Vorgänge unabhängig von Ort und Zeit immer wieder in gleicher Weise ablaufen. Dieses »Induktionsprinzip« hat sich, obwohl unbeweisbar, als sehr erfolgreich erwiesen.

b) Reproduzierbarkeit und Berechenbarkeit

Berechenbarkeit bzw. Kausalität hängen eng mit der Gültigkeit des Induktionsprinzips, also der Reproduzierbarkeit von Vorgängen unter gleichen Bedingungen zusammen. Denn wir können bei Anwendung auf die Wirklichkeit auch »Reproduzierbarkeit unter gleichen Bedingungen« nur im relativierten Sinn anwenden. »Reproduzierbarkeit« und »gleiche Bedingungen« sind nachprüfbar nur im Rahmen der erhaltenen Informationen, also der Meßgenauigkeit. Wenn aber Vorgänge innerhalb der Fehlergrenzen der Messungen gleich ablaufen, so bedeutet dies notwendig, daß kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen sich in ähnlich kleiner Weise im Verlauf der Prozesse auswirken. Diese Eigenschaft hängt eng zusammen mit dem Prinzip der »Linearität der Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen«: eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen bewirkt eine kleine Änderung des Verhaltens, eine doppelt so große, aber immer noch kleine Änderung bewirkt eine doppelt so große, aber immer noch kleine Änderung des Verhaltens.

Es wäre ein abendfüllendes Thema, auf die Gründe einzugehen, warum dieses Prinzip so überaus erfolgreich war und ist. Möglicherweise ist ein wesentlicher Grund die in der Vergangenheit dominierende analytische Methode der Physik. Analytisch soll dabei die Methode genannt werden, welche ihre Fragestellungen auf die einzelnen isolierten Objekte und Erscheinungen richtet, also eine Gesamtheit von Erscheinungen in ihre einzelnen Bestandteile zerlegt. Erst in den letzten Jahrzehnten sind synthetische Methoden immer aktueller geworden, welche globale Prozesse durch das Zusammenwirken vieler einzelner Systeme und Prozesse zu erklären versuchen. Ein ganzes Forschungsgebiet - die Synergetik - befaßt sich mit dieser Art von Problemstellungen, welche ja weit über den Bereich der Physik und Naturwissenschaften hinaus auch in ganz anderen Bereichen wie Ökonomie oder Soziologie auftreten.

III. Grenzen der Berechenbarkeit

a) Zufallsprozesse:
eine fundamentale Eigenschaft der beobachtbaren Welt

Im Gegensatz zu einem deterministischen Prozeß können fur den Verlauf eines Zufallsprozesses keine sicheren Prognosen, sondern nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden. Betrachten wir z. B. eine experimentelle Anordnung, mit der wir eine beobachtbare Größe messen können: Falls der Zeitverlauf dieser Größe durch Wahrscheinlichkeiten bestimmt ist, können verschiedene Messungen mit derselben Meßanordnung unter gleichen Bedingungen, aber zu verschiedenen Zeiten, oder mit identischen

Anordnungen zur gleichen Zeit, verschiedene Resultate, verschiedene »Realisierungen« ergeben. Die Menge aller möglichen Realisierungen definiert dann einen Zufallsprozeß oder, in der Fachsprache der Mathematiker, einen stochastischen Prozeß.

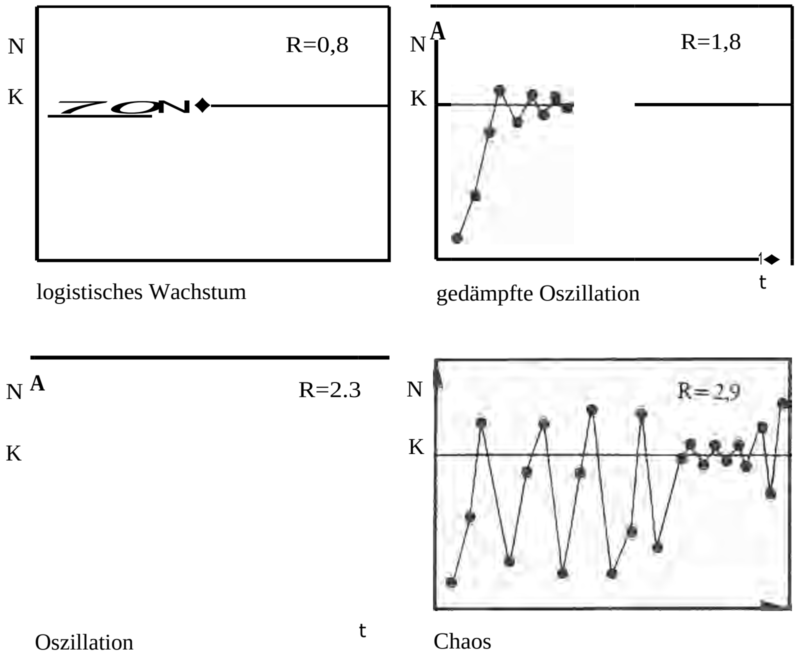
Mit der **Begründung** der Quantentheorie vor mehr als 50 Jahren hat sich im Hinblick auf die Problematik der prinzipiellen Bedeutung des Zufalls die herrschende Auffassung der Physiker grundlegend geändert. Danach ist der Zufall eine fundamentale Eigenschaft der Natur. Es lassen sich Eigenschaften wie Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens nicht gleichzeitig genau messen (Stichwort: Unschärferelationen). Die prinzipielle Unschärfe der physikalischen Parameter hat letztlich zur Folge die Aufweichung der deterministischen Physik und die Ersetzung deterministischer, d. h. genau vorbestimmter, Gesetzmäßigkeiten durch statistische Aussagen. Damit ist ein Einzelergebnis durch Zufallsgesetze bestimmt. Ich möchte darauf hinweisen, daß die angedeutete Interpretation der Quantenmechanik zwar allgemeine Lehrmeinung ist, deswegen aber nicht notwendig wahr sein muß. Ich glaube nicht, daß wir diese Diskussion hier führen müssen, wenn wir entscheiden wollen, ob dem Zufall in der Natur eine prinzipielle Bedeutung zukommt oder ob er Ausdruck des Nichtwissens, mangelnder Information, ungenügender Meßgenauigkeit ist. Diese Frage läßt sich nämlich schon auf einer ganz anderen Ebene diskutieren und, wie ich meine, beantworten. Wegen der prinzipiellen Beschränktheit der Meßgenauigkeit, der möglichen Zahl der vornehmbaren Messungen und wegen der Endlichkeit der möglichen Wissensspeicherung und der möglichen Rechengeschwindigkeit sollte es klar sein, daß Systeme, welche mit der Umwelt in Wechselwirkung stehen, nicht vollständig erfaßt werden können. Ich will Gedankenspiele derart, daß z. B. auch bei größtmöglicher Rechengeschwindigkeit die Berechnung von relativ kleinen Systemen und Prozessen langsamer ist als der zeitliche Ablauf der Prozesse, gar nicht weiter fortspinnen. Ich will nur festhalten, daß es fir uns völlig unerheblich ist, ob »im Prinzip« Naturvorgänge deterministisch ablaufen oder nicht, da diese Determiniertheit uns Menschen *prinzipiell* nicht erschlieBbar ist. Also ist der stochastische Charakter der in der Welt ablaufenden Prozesse fundamental und die Einbeziehung von Zufallsprozessen in unsere Diskussion des Problems der Berechenbarkeit eine Notwendigkeit.

b) Chaos:
ein Regelfall für nichtlineare mathematische Modelle

Der jetzt folgende Teil betrifft Ergebnisse zum chaotischen Verhalten der Lösungen nicht-linearer mathematischer Gleichungssysteme. Der Anstoß zur Untersuchung dieser Gleichungssysteme kam von Naturwissenschaftlern, z. B. von dem amerikanischen Physiker Edward Lorenz bei der Aufstellung eines einfachen mathematischen Modells zur Turbulenz in Flüssigkeiten und Gasen. Eine andere in diesem Zusammenhang untersuchte Gleichung wird oft angewendet zur Erklärung des Wachstumsverhaltens biologischer Populationen. Die folgenden Bemerkungen betreffen aber zunächst nur Eigenschaften von mathematischen Gleichungen und nicht von realen Vorgängen. Falls allerdings solche Gleichungen mathematische Modelle von realen Prozessen sind, lassen sich auch Konsequenzen für die Berechenbarkeit der entsprechenden Prozesse ziehen. Diese Konsequenzen werde ich weiter unten diskutieren. Die mathematische Theorie des Chaos betrifft rein deterministische Gleichungen. Die in diesen Gleichungen auftretenden Variablen unterliegen der Kausalität im streng mathematischen Sinn: die Vorgabe der Anfangsbedingungen für einen bestimmten Zeitpunkt determiniert eindeutig das Verhalten für spätere Zeiten.

Den zeitlichen Verlauf der Werte der Variablen, ausgehend von speziellen Anfangsbedingungen, nennt man eine spezielle Lösung der Gleichungen. Betrachten wir nun eine Schar von verschiedenen speziellen Lösungen, deren Anfangsbedingungen sich nur geringfügig voneinander unterscheiden: Wir sprechen von »Chaos«, wenn diese Lösungen sich völlig regellos verhalten und völlig regellos voneinander abweichen. »Regelloses« Verhalten einer speziellen Lösung liegt dann vor, wenn für diese Lösung keine »Regel« festgestellt werden kann, z. B. keine Periodizität, keine Entwicklung in einer bestimmten Richtung, keine Tendenz, einen stationären Ruhezustand zu erreichen. Es ist schwierig, eine saubere, allgemeine Definition des mathematischen »Chaos« zu geben. Dafür ist es wesentlich einfacher, anhand von Beispielen den Übergang vom regulären, vom regelmäßigen zum chaotischen Verhalten zu verdeutlichen. Ein einfaches und gut untersuchtes mathematisches Modell mit chaotischem Verhalten stellt eine Differenzengleichung dar, welche oft angewendet wird zur quantitativen Beschreibung des dichteabhängigen Wachstums biologischer Arten, die sich nur zu festen Zeiten im Jahr vermehren (z. B. Insekten oder Vögel). Ohne im Detail auf mathematische Einzelheiten einzugehen, habe ich in der Abbildung dargestellt, daß bei Variation eines Parameters, der sogenannten Wachstumsrate R, sich völlig verschiedene Wachstumscharakteristika ergeben: sogenanntes logistisches Wachstum mit einfacher Annäherung an einen Zustand konstanter Populationszahl, gedämpfte Oszillation, ungedämpfte Oszillation oder schließlich völlig regelloses, chaotisches Verhalten.

Ein weiteres Beispiel für chaotisches Verhalten bieten die sogenannten Zwei- und Dreikörperprobleme: Während beim Zweikörperproblem, d. h. der Bewegung zweier sich gegenseitig anziehender Massenpunkte, sich regelmäßige Bahnformen (Ellipsen) ergeben, werden die Bewegungen im Dreikörperproblem meist regellos und chaotisch.



Wachstumsverhalten von Populationen, welche durch die Differenzengleichung
A N=R- N (K-N)/K
beschrieben werden.

N : Populationsgröße
AN : Veränderung von N in der folgenden Generation
R : Wachstumsrate (für kleine Populationen)
K : Kapazität
t : Zeit

Variation der Wachstumsrate R.

Es ist erstaunlich, daß die Tendenz zum »Chaos«, welche bereits in elementaren Modellen in Erscheinung tritt, von den Physikern so lange nicht beachtet wurde. Es scheint hier ein Verdrängungsprozeß stattgefunden zu haben, verständlich durch die großen Erfolge der Physik in ihrem Bestreben, Ordnung in die Natur zu bringen und sie durch kausal ablaufende Prozesse zu erklären.

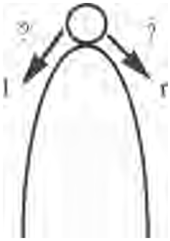
Es gibt Fälle, in welchen ein chaotisches Verhalten auf einer viel gröberen Skala durch geordnete Prozesse überlagert zu sein scheint. Wir sehen, wie wichtig hier - wenn wir Anwendungen auf die Wirklichkeit wagen - die

Größe des Blickwinkels, die erwünschte Genauigkeit der Registrierung, die überschaubare Zeitdauer der Prozesse wird. Bei Anwendung der zunächst mathematischen Theorie des Chaos auf reale Prozesse werden wir wieder auf relativierte Begriffsbildung im obigen Sinne zurückgreifen müssen. Was man mit einigem Recht bereits jetzt feststellen kann, ist, daß das Chaos in nichtlinearen mathematischen Gleichungen eher die Regel als die Ausnahme darstellt.

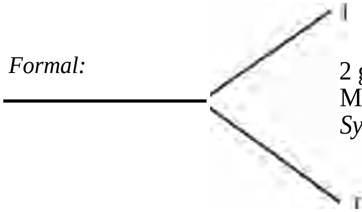
c) Symmetriebrechung, Zufall und Chaos

Wenn wir uns auch darin einig sind, daß dem Zufall eine fundamentale Bedeutung zukommt, so ist damit noch nichts über die Eigenschaft der Berechenbarkeit oder Nichtberechenbarkeit von Systemen gesagt. Zwar wirken zufällige Ereignisse im Prinzip primär als Störungen auf das System, aber die zufälligen Einflüsse können so klein sein, daß sie im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Rolle spielen.

Wir wollen nun eine besonders einfache aber nicht ganz typische Situation betrachten, in welcher der Zufall die Vorausberechenbarkeit eines Systems aufhebt. Legen wir - wie in der Abbildung angedeutet - eine Kugel auf die Spitze einer Erhebung. Falls die Kugel eine ideale Form hat, verharrt sie im Zustand der Ruhe, solange keine Schwankungen die Situation stören. Man nennt einen solchen Zustand ein labiles Gleichgewicht, labil, weil bereits kleinste Ungenauigkeiten oder Störungen dazu führen, daß die Kugel hinabrollt. Da es zunächst völlig offen ist, in welcher Richtung die Kugel schließlich hinabrollt, wird dieser Zustand auch symmetrisch genannt. Nun sind ja zufällige Schwankungen, Ungenauigkeiten nie auszuschalten. Also wird die Kugel mit Sicherheit hinabrollen, und zwar in einer bestimmten Richtung. Es liegt Symmetriebrechung durch ein Zufallsereignis vor. Es läßt sich vorher aber keine Prognose stellen, in welcher Richtung die Kugel sich bewegen wird, da ja die Richtungen gleich (bzw. im allgemeinen ähnlich) wahrscheinlich sind. Der Vorgang ist nicht vorausberechenbar! Dieses Beispiel enthält bereits die wesentlichen Charakteristika eines nichtberechenbaren Systems. Die Situation wird noch extremer, wenn in einem Prozeß mehrere Symmetriebrechungen hintereinander ablaufen. Betrachten wir z. B. ein System viermaliger Symmetriebrechung, wobei jede Symmetrie dem System zwei gleichwertige Möglichkeiten der weiteren Entwicklung eröffnet. Wie man sofort nachrechnen kann, bestehen 16 verschiedene Möglichkeiten, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Zustandes, der schließlich erreicht wird, ist nur ein Sechzehntel. Es gibt anfangs 15 andere verschiedene aber gleich-wahrscheinliche Möglichkeiten. Halten wir fest: Eine einigermaßen sichere Prognose ist nicht möglich. Zwar läßt sich der gesamte, schließlich realisierte Prozeß nachträglich verstehen, aber nicht vorausberechnen.

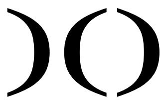


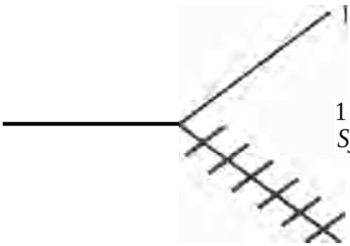
Formal:



2 gleichwertige
Möglichkeiten:
Symmetrie

zufällige Schwankung





1 ist realisiert:
Symmetriebrechung

In ganz ähnlicher Weise wirkt sich der Zufall in solchen Systemen aus, für welche deterministische mathematische Modelle existieren mit chaotischem Lösungsverhalten, welche die im System vorhandenen Wechselbeziehungen in sehr guter Näherung berücksichtigen. Chaotisches Verhalten bedeutet ja, daß kleinste, minimale Änderungen eines Zustandes zu großen und globalen Veränderungen im Verhalten des Systems führen. Wenn wir nun den Einfluß zufälliger kleiner Schwankungen mitberücksichtigen, so liegt hier eine der Symmetriebrechung völlig analoge Situation vor. Sofern in dieser Weise das System dauernd durch den Zufall beeinflußt wird, ist die Konsequenz, daß Systeme, deren deterministische mathematische Modelle ein chaotisches Verhalten aufweisen, einem Prozeß dauernder Symmetriebrechung unterliegen. Die Vorausberechenbarkeit ist damit auch bei größtem Rechenaufwand und größtmöglich gesteigerter Rechengenauigkeit nicht mehr gegeben, da ja der Einfluß des Zufalls grundsätzlich nicht wegzudiskutieren ist.

Man kann sicher sein, daß in der Regel durch zufällige Schwankungen die Berechenbarkeit von Systemen, welche zum Chaos neigen, zerstört wird. Ich möchte aber etwas einschränkend darauf hinweisen, daß die Forschung zu diesem Problemkreis noch ganz am Anfang steht. Die »Eigenschaften« des Chaos sind bisher in systematischer Weise noch nicht verstanden. Ebenso weiß man fast noch nichts darüber, wie Zufallsprozesse im einzelnen in das chaotische Geschehen eingreifen. Im Regelfall werden die Auswirkungen sicher so sein, wie oben beschrieben. Dennoch möchte ich nicht ausschließen, daß spezielle Zufallsprozesse dämpfend auf das Chaos wirken.

IV. Konsequenzen

Bevor ich versuche, die Konsequenzen aus den bisherigen Ausführungen zu ziehen, die folgende Bemerkung:

Die Methode der Mathematisierung ist offenbar weit über den naturwissenschaftlichen Bereich hinaus anwendbar, z. B. auch auf soziologische, ökonomische oder politische Systeme. Mit anderen Worten: die für derartige Systeme relevanten Charakteristika lassen sich auf mathematische Relationen abbilden. Allerdings bin ich mir nicht im klaren, wo die Grenzen der Mathematisierung in diesem Sinne wirklich liegen. Jedenfalls sind nicht-mathematisierbare Prozesse auch nicht berechenbar. Für sie läßt sich damit die Nicht-Berechenbarkeit sofort folgern.

Wenn wir aber für Prozesse oder Systeme die Möglichkeit der Mathematisierung akzeptieren, dann müssen wir fir sie auch all die Konsequenzen akzeptieren, welche sich aus dem bisher Gesagten ergeben. Die zwei wesentlichen Punkte möchte ich noch einmal wiederholen:

1. Chaos ist die Regel.

Nach den bisherigen Erfahrungen aus dem Studium nichtlinearer mathematischer Modelle scheint chaotisches Lösungsverhalten mit all seinen Konsequenzen wie regellose Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen oder exponentielle Fehlerfortpflanzung eher die Regel als die Ausnahme zu sein.

2. Zufall und Chaos zerstören die Berechenbarkeit.

Da zufällige Schwankungen, welche sich z. B. als Fehler in den Anfangsbedingungen auswirken, prinzipiell immer auftreten, ist die Konsequenz, daß fir diese Systeme Vorausberechenbarkeit in der Regel nicht gegeben ist. Die Schwankungen schaukeln sich in nicht vorausberechenbarer Weise auf und zerstören die Brauchbarkeit von Prognosen.

Ich will nun noch einige Beispiele angeben für Prozesse und Systeme, bei welchen Berechenbarkeit nicht gegeben ist:

1. Die Umkehr des Erdmagnetfeldes

Die Umkehrungen und Veränderungen des Magnetfeldes der Erde scheinen in völlig unsystematischer Weise zu erfolgen. Computerberechnungen zu einfachen mathematischen Modellen weisen eindeutig auf chaotisches Verhalten hin. Es ist nicht prognostizierbar, ob innerhalb der nächsten Jahrtausende das Erdmagnetfeld umpolen oder noch einige hunderttausend Jahre relativ stabil bleiben wird.

2. Wetterprognosen

Langfristige Wettervorhersagen sind unmöglich. Bereits einfache Gleichungen zu Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen zeigen Turbulenzen, d. h. chaotisches Verhalten. An diesen grundsätzlichen Fakten kann auch der Einsatz von Beobachtungssatelliten und Großrechnern nicht wesentlich etwas ändern.

3. Biologische Evolution

Die Evolution läßt sich als ein dauernder Prozeß der Symmetriebrechung betrachten. Zufällige Schwankungen wirken entscheidend dabei mit, ob und welche Mutationen der Erbanlage eine kritische Populationsgröße erreichen, oberhalb derer über das weitere Schicksal durch Selektionsdruck entschieden wird. Die Evolution ist nicht vorausberechenbar. Das schließt nicht aus, daß sie durch mathematische Modelle verstehbar und nachträglich vollziehbar ist.

4. Bevölkerungswachstum, ökonomische Systeme, Weltmodelle, geschichtliche Prozesse.

Es scheint mir sicher, daß auch mittels großer Rechenanlagen für derartige Systeme nur in beschränktem Umfang Prognosen gestellt werden können. Dies liegt nicht nur an der Vielzahl möglicher Fehlerquellen, sondern auch am chaotischen Lösungsverhalten der entsprechenden mathematischen Modelle.

Fassen wir also zusammen: D er Erfolg der exakten Naturwissenschaften, vor allem der Physik, zeigt, daß in vielen Situationen der Wirklichkeit Berechenbarkeit tatsächlich gegeben ist. Allerdings scheinen diese Situationen Ausnahmesituationen zu sein. Im allgemeinen Fall wirken viele Untersysteme und Einflüsse zusammen. Auch dann können Zustände der Ordnung entstehen, insbesondere wenn Systeme offen sind und ständiger Energiedurchsatz diese Ordnung aufrecht erhält. Diese synergetischen Strukturbildungsprozesse sind Voraussetzung für das Leben, für das relative, teilweise oder zeitweise Funktionieren menschlicher Gesellschaften, Wirtschaftssysteme usw.

Oft jedoch scheint die Tendenz zum Chaos vorherrschend. Berechenbarkeit ist dann die Ausnahme. Sichere Prognosen über zukünftige Entwicklungen sind meist nicht möglich. Es scheint mir sogar so, daß in vielen Fällen die nicht-mathematische Beschreibung von Systemen durch die normale Sprache gleichwertig oder besser »funktioniert« als die mathematische Formulierung. Die mathematische Methode verliert damit nicht ihren Sinn, soweit es um Berechnungen über kurze Zeiträume, Kurzzeitprognosen oder Zustandsanalysen eines Systems geht. Und Nichtberechenbarkeit bedeutet nicht, daß Einflüsse bestimmter Faktoren nicht sehr genau auch in ihren Konsequenzen abgeschätzt werden können: Auch wenn z. B. die Entwicklung komplexer Öko-Systeme nicht vorausberechenbar ist, so ist ihre Zerstörung durch Vergiftung mit bestimmten Schadstoffen doch oft sehr wohl genau prognostizierbar. Wir sollten aber allzu sichere Prognosen über die Zukunft, vor allem auch wenn sie sich auf den Einsatz von Großrechnern berufen, mit einer gewissen Skepsis betrachten. Der potenzierten Wirkung kleinster Fehler auf das Endergebnis von Rechnungen in mathematischen Modellen mit Chaos läßt sich auch durch Steigerungen der Rechengenauigkeiten nur beschränkt begegnen.

Literaturverzeichnis

Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit (Heidelberger Taschenbücher 87, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978).

Haken, H.: Synergetics. An Introduction (Second enlarged edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977 and 1978).

Haken, H.: Erfolgsgeheimnisse der Natur. Synergetik: Die Lehre vom Zusammenwirken (DVA, Stuttgart, 1981).

Graham, **R.:** Ein Stück unberechenbarer Natur: Die Turbulenz (Bild der Wissenschaft, **4,** 1981, 68-82).

Decker, **U. /H.** Thomas: Unberechenbares Spiel der Natur: Die Chaos-Theorie (Bild der Wissenschaft, 1, 1983, 62-75, 131-134).

May, **R.M:** Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 261 (1976), 459-467.

Feigenbaum, M.J.: J. Stat. Phys. 19 (1978), 25-52. J. Stat. Phys. 21(1979), 669-706.

Grossmann, S./S. Thomae: Z. Naturforschung 32a (1977), 1353-1363.